Работа выполнена в рамках реализации ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 – 2013 годы (проект НК-13(9)).

ЛИТЕРАТУРА

1. Кострикин А. И., Шафаревич И. Р. *Градуированные алгебры Ли конечной характеристики* // Изв. АН. СССР. Сер. мат. – 1966. – Т. 33. – С. 251-322.

2. Кострикин А. И., Острик В. В. *К теореме распознавания для алгебр характеристики 3* // Мат. сборник. – 1995. – Т. 186. – № 10. – С. 73-88.

3. Стейнберг Р. *Лекции о группах Шевалле.* – М.: Мир, 1974. – 261 с.

Е. Н. Лубягина

Вятский государственный гуманитарный университет, mathematic@vshu.kirov.ru

МАКСИМАЛЬНЫЕ ИДЕАЛЫ В ПОЛУКОЛЬЦАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ЕДИНИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

Введение. Через $C(X,S)$ обозначим полукольцо всех непрерывных функций, определенных на произвольном компакте X (то есть компактном хаусдорфовом пространстве) и принимающих значения в топологическом полукольце S. Пусть $\mathbf{I} = [0,1]$ — единичный числовой отрезок, рассматриваемый с обычными операциями умножения $\cdot$, max $(\vee)$ и min $(\wedge)$, частичной операцией сложения $+$ и стандартной топологией. Тогда $C(X,\mathbf{I})$ в зависимости от выбранных операций (определенных поточечно) может быть: 1) идемпотентным полукольцом с операциями $\cdot$ и $\vee$, 2) частичным полукольцом с операциями $\cdot$ и $+$, 3) решеткой с операциями $\wedge$ и $\vee$. Частичное полукольцо $C(X,\mathbf{I})$ по свойствам похоже на полукольцо $C(X,\mathbf{R}^+)$. Если вместо $\mathbf{I}$ взять отрезок $[-1,1]$ с операцией умножения и частичной операцией сложения, то получим частичное кольцо, похожее по своим свойствам на кольцо $C(X,\mathbf{R})$. Решетки $C(X,\mathbf{I})$ по свойствам близки к идемпотентным полукольцам $C(X,\mathbf{I})$.

В $C(X,\mathbf{I})$ все функции, кроме единицы, не обратимы. Однако любой функции $f \in C(X,\mathbf{I})$ можно сопоставить функцию $1-f \in C(X,\mathbf{I})$.

Напомним, что идеалом J коммутативного полукольца $\langle S,\oplus,\odot\rangle$ называется его непустое подмножество, такое, что для любых a, $b \in J$, $s \in S$ выполняется: $a \oplus b \in J$, $a \odot s \in J$. Простыми идеалами будут в точности те идеалы, дополнение которых до S мультипликативно замкнуто. В коммутативных полукольцах максимакльные идеалы простые.

Функции $f \in C(X,\mathbf{I})$ сопоставляется множество $Z(f) = f^{-1}(0)$, называемое нуль-множеством, через $Z^0(f)$ обозначается его внутренность. Каждой точке $x \in X$ соответствуют идеалы $E_x = \{f \in C(X,\mathbf{I}) : f = 1$ на некоторой окрестности точки $x\}$ и $O_x = 1 - E_x = \left\{f \in C(X,\mathbf{I}) : x \in Z^0(f)\right\}$, простые идеалы $M_x = \{f \in C(X,\mathbf{I}) : f(x) = 0\}$ и $N_x = \{f \in C(X,\mathbf{I}) : f(x) \neq 1\}$.

Простые идеалы. Простые идеалы кольца $C(X,\mathbf{R})$ и полукольца $C(X,\mathbf{R}^+)$ изучались в [1] и [2].

Рассмотрим далее строение простых идеалов в $C(X,\mathbf{I})$.

В частичном полукольце $C(X,\mathbf{I})$ идеал, содержащий положительную функцию, будет совпадать с $C(X,\mathbf{I})$.

В полукольце и частичном полукольце $C(X, \mathbf{I})$ естественным образом вводятся отношения делимости и порядка:

1) f делится на g $\Leftrightarrow$ найдется $h \in C(X, \mathbf{I})$, для которой $f = gh$,

2) $f \leqslant g \Leftrightarrow \forall x \in X \;\; f(x) \leqslant g(x)$.

Тогда, если $f \leqslant g^2$, то f делится на g. Используя этот факт, легко доказать, что простые идеалы в полукольце и частичном полукольце $C(X, \mathbf{I})$ $\wedge$-простые и с каждым своим элементом содержит все элементы, меньшие его. Кроме того, имеет место

Предложение 1. *Любой простой идеал P полукольца $C(X, \mathbf{I})$ содержит O_x для однозначно определенной точки $x \in X$. Если P содержит функцию f, такую, что $f(x) \neq 0$, то $N_x \subseteq P$.*

Для изучения свойств простых идеалов полукольца (решетки) $C(X, \mathbf{I})$ имеет смысл рассмотреть двойственный идеалу объект — фильтр, то есть множество, замкнутое по умножению (по операции $\wedge$) и содержащее с каждым своим элементом все элементы, большие его. Аналогично идеалам простой фильтр полукольца и решетки $C(X, \mathbf{I})$ — фильтр, дополнение которого до $C(X, \mathbf{I})$ замкнуто по операции $\vee$.

В полукольце и решетке $C(X, \mathbf{I})$ фильтры и идеалы связаны следующим образом.

Предложение 2. *Для подмножества J полукольца (решетки) $C(X, \mathbf{I})$ эквивалентны следующие утверждения:*

1. J — простой идеал;

2. $C(X, \mathbf{I}) \setminus J$ — простой фильтр;

3. J — идеал, $C(X, \mathbf{I}) \setminus J$ — фильтр.

Следовательно, в полукольце и решетке $C(X,\mathbf{I})$ максимальные идеалы имеют вид $C(X,\mathbf{I})\setminus F$ по всем минимальным простым фильтрам F.

В полукольце $C(X,\mathbf{I})$ будет выполняться

Предложение 3. *Если F — фильтр в полукольце $C(X,I)$, то $1-F$ — его идеал.*

Для решетке $C(X,\mathbf{I})$ верено и обратное.

Предложение 4. *Подмножество F решетки $C(X,I)$ есть (простой) фильтр тогда и только тогда, когда $1-F$ есть (простой) идеал.*

Для идеала J полукольца (решетки) $C(X,\mathbf{I})$ введем обозначение $O_J = \{c\in C(X,\mathbf{I}) : (\exists e\notin J)ce=0\}$. Простой идеал P редуцированного коммутативного полукольца будет минимальным $\Leftrightarrow$ $O_P = P$. Двойственным свойством облададают фильтры F. Обозначим $E_F = \{c\in C(X,\mathbf{I}) : (\exists e\notin F)c\vee e=1\}$. Имеем $E_F = F \Leftrightarrow F$ — минимальный простой фильтр.

Далее заметим, что для любых функций f, $e\in C(X,\mathbf{I})$

$$fe=0 \Leftrightarrow f\wedge e=0 \Leftrightarrow 1-f\wedge e=1 \Leftrightarrow (1-f)(1-e)=0.$$

Имеем

$$1-O_P=\{1-f\in C(X,\mathbf{I}) : (\exists e\notin P)f\wedge e=0\}=$$

$$=\{1-f\in C(X,\mathbf{I}) : (\exists e\notin P)(1-f)\wedge(1-e)=1\}=E_{1-P}.$$

Следовательно, минимальные простые идеалы в полукольце и решетке $C(X,\mathbf{I})$ совпадают.

Предложение 5. *Подмножество P полукольца (решетки) $C(X, \mathbf{I})$ является минимальным простым идеалом тогда и только тогда, когда $1 - P$ есть минимальный простой фильтр.*

Для произвольной точки $x \in X$ зададим конгруэнцию $C(X, \mathbf{I})/\rho_x$ на полукольце $C(X, \mathbf{I})$: $f \rho_x g \Leftrightarrow f = g$ на некоторой окрестности точки x. В фактор-полукольце X/ρ_x введем отношение $\prec$: $[f]_{\rho_x} \prec [g]_{\rho_x} \Leftrightarrow f \leqslant g$ на некоторой окрестности точки x. Напомним, что точка $x \in X$ называется F-точкой, если $\forall f, g \in C(X, \mathbf{R})$ $(x \in Z^0(fg) \Rightarrow x \in Z^0(f) \cup Z^0(g))$. Тогда получаем следующую характеризацию F-точек в X.

Предложение 6. *Для полукольца $C(X, \mathbf{I})$ эквивалентны следущие утверждения: 1) $x \in X$ - F-точка; 2) идеал O_x простой; 3) $C(X, \mathbf{I})/\rho_x$ - линейно упорядоченное полукольцо относительно порядка $\prec$; 4) в $C(X, \mathbf{I})$ все простые идеалы, содержащие O_x, образуют цепь.*

В случае, когда все точки в X являтся F-точками, X называется F-пространством. Тогда имеем следующий результат.

Предложение 7. *Для произвольного компакта X эквивалентны следущие утверждения: 1) X — F-пространство; 2) каждый простой идеал полукольца $C(X, \mathbf{I})$ содержится в единственном максимальном идеале; 3) простые идеалы полукольца $C(X, \mathbf{I})$, содержащие данный простой идеал, образуют цепь; 4) максимальные идеалы полукольца $C(X, \mathbf{I})$ имеют вид $C(X, \mathbf{I}) \setminus E_x$ по всем $x \in X$.*

В кольцах $C(X, \mathbf{R})$ и полукольцах $C(X, \mathbf{R}^+)$ простые идеалы, содержащие данный простой идеал, также образуют цепь [2].

Максимальные идеалы. В частичных полукольцах, как и в полукольце $C(X, \mathbf{R}^+)$, верно следующее утверждение.

Предложение 8. *Максимальными идеалами частичного полукольца $C(X, \mathbf{I})$ являются в точности идеалы M_x для различных точек $x \in X$.*

Легко видеть, что в полукольце $C(X, \mathbf{I})$ любой максимальный идеал M, содержащий O_x, содержит N_x и содержится в $C(X, \mathbf{I}) \setminus E_x$. В силу предложений 2 и 5 имеет место

Теорема. *Максимальные идеалы полукольца (решетки) $C(X, \mathbf{I})$ — это в точности идеалы вида $C(X, \mathbf{I}) \setminus (1 - P)$ по всем простым идеалам P, совпадающим с O_P.*

Поэтому в полукольце и решетке $C(X, \mathbf{I})$ имеем: F — максимальный фильтр $\Leftrightarrow$ $C(X, \mathbf{I}) \setminus F$ — минимальный простой идеал $\Leftrightarrow$ $1 - F = C(X, \mathbf{I}) \setminus (1 - (C(X, \mathbf{I}) \setminus F))$ — максимальный идеал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gillman L., Jerison M. *Rings of continuous functions.* · N. J.: Springer-Verlag., 1976.

2. Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семенова И. А. *Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость. идеалы, конгруэнции* // Фундам. и прикл. математика. – 1998. – Т. 4. – № 2. – С. 493-510.